# Раздел III. Волновое движение

## 1. Волновые уравнения

При описании среды в переменных Эйлера физические характеристики ее определяются заданием некоторой величины (или совокупности физических величин) в каждой точке пространства в данный момент времени. Изменение этих величин (в данной точке пространства) с течением времени называется движением.

Среди возможных движений сплошной среды выделяется волновое движение, которое в большинстве случаев можно интерпретировать, как последовательное перемещение значений физических величин, заданных в некоторый (начальный) момент времени в определенных точках пространства от одной точки к другой. Представление о волновом движении в простейшем случае иллюстрируется одномерным движением. Пусть при $t=0$ в некоторой области пространства $0<x<l$ задано начальное распределение физической величины (например, плотности массы) с помощью функции: $\rho(x,\,0)=f(x)$. Движение называется волновым, если с течением времени изменение распределения плотности можно интерпретировать, например, как смещение начального распределения в положительном направлении оси $OX$ :

$$\rho(x,t)=f(x-Vt).$$

В рассматриваемом случае смещение пропорционально времени. Коэффициент пропорциональности называется (фазовой) скоростью волны.

Если начальное распределение задано дифференцируемой функцией, то нетрудно найти дифференциальное уравнение (в частных производных), которому удовлетворяет данное волновое движение среды:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+V\frac{\partial\rho}{\partial x}=0. \tag{1}$$

Полученное уравнение называется уравнением простой волны.

Если начальное распределение не описывается дифференцируемой функцией, то уравнение волнового движения удобнее задавать в интегральной форме, рассматривая перенос волной данной физической величины (например массы) через границу выделенного объема.

$$m(t)=\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx$$

Изменение массы в данной области, вызванное волновым движением среды, определяется потоком ее через границу:

$$\dot m(t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\rho(x,t)dx=-V\int_{x_2}\rho(x)d\sigma+V\int_{x_1}\rho(x)d\sigma=-\oint_{\Sigma}\rho(x)\vec{V}d\vec{\sigma} \tag{2}$$

Для дифференцируемой функции, используя теорему Гаусса, это соотношение можно привести к виду:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t)dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)V\right)dx,$$

что сразу же дает дифференциальное уравнение (1).

Если среда является изотропной и допускает распространение волн как в положительном, так и в отрицательном направлении с одинаковой скоростью, то волновое уравнение (1) удобно заменить уравнением второго порядка:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-V^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}=0, \tag{3}$$

решение которого представляет произвольную суперпозицию функций $\rho(x,t)=f_1(x-Vt)+f_2(x+Vt)$, описывающих две волны, распространяющиеся навстречу друг другу.

Представление Фурье позволяет описывать произвольную функцию в виде интеграла:

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k,\omega)\exp\{ikx - i\omega t\}dk,$$

где каждая Фурье-компонента $\tilde{\rho}(k,\omega)$ удовлетворяет волновому уравнению (3), что приводит к соотношению (4), связывающему волновое число $k$ и частоту $\omega$:

$$\omega^2 - V^2k^2 = 0, \tag{4}$$

которое называется дисперсионным соотношением.

Решение волнового уравнения в виде монохроматической волны называется нормальной волной и является обобщением решения линейного уравнения для определения собственных колебаний системы.

Во многих случаях распространение волны в среде сопровождается изменением формы начального распределения. Фурье-разложение представляет естественный подход для обобщения понятия волнового движения. Действительно, начальное распределение физической величины может быть задано как суперпозиция нормальных волн с различной скоростью распространения. В этом случае можно задать $V = V(k)$ или $V = V(\omega)$ и исследовать распространение волнового пакета. Для упрощения поставленной задачи положим, что в некоторой окрестности значений волнового числа $k$ задано дисперсионное соотношение (4), которое представлено лишь первыми членами разложения:

$$\omega = \omega(k) = \omega_0 + \frac{\partial\omega}{\partial k}(k - k_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}(k - k_0)^2 + o\left((k - k_0)^2\right), \tag{5}$$

где $\omega_0 = \pm Vk_0$.

Пространственное распределение физической величины представляется в виде интеграла Фурье:

$$\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k,\omega)\exp\left\{ikx - i\left[\omega_0 + \omega_0'(k - k_0) + \omega_0''(k - k_0)^2/2\right]t\right\}dk =$$

$$= \exp\{ik_0(x - Vt)\}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k_0 + k,\omega)\exp\left\{i(x - \omega_0't)k - i(\omega_0''t/2)k^2\right\}dk.$$

Если волновой пакет состоит из группы волн с близкими значениями волнового числа $|k - k_0| < \Delta$ и одинаковыми амплитудами, то при $\omega_0'\Delta >> \omega_0''\Delta^2$ волновое решение имеет вид волны с изменяющейся амплитудой:

$$\rho(x,t) = A(x,t)\exp\{ik_0(x - Vt)\},$$

где

$$A(x,t) = \tilde{\rho}(k_0)\int_{-\Delta}^{+\Delta}\exp\{i(x - \omega_0't)k\}dk = \tilde{\rho}(k_0)\frac{2\sin((x - \omega_0't)\Delta)}{(x - \omega_0't)\Delta}.$$

Полученное пространственное распределение физической величины называется волновым пакетом и распространяется со скоростью $V_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k}$, называемой групповой скоростью волны. Область локализации волнового пакета определяется не равными нулю членами Фурье-разложения $\tilde{\rho}(k,\omega)$, вносящими заметный вклад в интеграл. При вычислении интеграла мы полагали, что отличные от нуля члены дают заметный вклад лишь в малой окрестности $k_0$.

Квадратичные члены разложения (5) приводят к изменению начальной формы пакета – его расплыванию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{i(x-\omega_0' t)k - i(\omega_0'' t/2)k^2\}dk = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0'' t}} \exp\left\{-i\frac{(x-\omega_0' t)^2}{2\omega_0'' t} + i\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Явление расплывания волнового пакета, образованного из нормальных волн с различной фазовой скоростью распространения, называется дисперсией (от лат. Dispersio – рассеяние, уничтожение).

Волновое уравнение для волн, обладающих дисперсией, несколько сложнее рассмотренного ранее простейшего. Примером может служить уравнение Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

для которого дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2(k) = c^2k^2 + \omega_0^2.$$

Фазовая скорость этой волны

$$V_{ph}(k) = \frac{\omega}{k} = c\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2},$$

а групповая

$$V_{gr}(k) = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{ck}{\sqrt{1+\omega_0^2/c^2k^2}}.$$

Связь между фазовой и групповой скоростью нетривиальна. Возможны случаи, когда эти скорости отличаются знаком..

Полученные результаты допускают естественное обобщение на многомерные системы. В этом случае приходится вместо волнового числа вводить волновой вектор $\vec{k}$, определяющий направление распространения волны. Поверхность постоянной фазы, определенная в некоторый момент времени, называется волновым фронтом. Волновой вектор определяет нормаль к волновому фронту – направление распространения волны.

Другая возможность обобщения понятия волнового движения связана с рассмотрением процессов переноса выделенного состояния среды со скоростью, определяемой этим состоянием (в каждой точке). Рассмотрим вновь одномерную волну. Пусть начальное распределение задано на некотором интервале, например $0 < x < l$, некоторой функцией $\rho(x,0) = f(x)$, а распространение волны происходит со скоростью, определяемой состоянием среды в данной точке: $V = V(\rho)$. В этом случае в момент времени $t \neq 0$ координата точки, имевшей значение $\rho(s)$ изменится:

$$x = s + V(f(s))t \tag{6}$$

Это уравнение можно рассматривать, как параметрическое задание волнового решения в произвольный момент времени, поскольку оно определяет структуру волны $\rho(x,t)$ по заданному начальному распределению. Если распределение описывается дифференцируемой функцией, то нетрудно получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет волновое движение рассматриваемого типа. Действительно, $\rho(s)$ определяет волну в произвольный момент времени, если уравнение (6) определяет (в неявной форме) значение параметра $s = s(x,t)$ в произвольный момент времени в данной точке пространства. Дифференцирование дает:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}=\frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}=\rho'\frac{\partial s}{\partial x} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t}=\rho'\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Из уравнения (6) следует:

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{1+V't} \qquad \frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{V}{1+V't}.$$

Отсюда для дифференцируемой функции $\rho(x,t)$ получается нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее волновой процесс:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0.$$

Уравнение такого типа называется квазилинейным. Описанный метод построения решения квазилинейного уравнения называется методом характеристик (Римана). Напомним, что характеристикой уравнения называется зависимость $x=x(t,\,f_0)$, определяющая закон движения точки с заданным значением физической величины $f_0=const$. Дифференцирование этого соотношения позволяет определить скорость распространения рассматриваемой точки «вдоль характеристики». В частности, для указанного нелинейного уравнения скорость распространения постоянна.

Однозначное решение указанного типа для произвольного начального распределения может существовать лишь в ограниченной области пространства в течение ограниченного интервала времени.

Рассмотрим простой пример. Пусть, для определенности, скорость распространения волны пропорциональна величине возмущения среды, т. е. $V(\rho)=V_0\frac{\rho}{\rho_0}$, а начальное распределение задано зависимостью, изображенной на рисунке

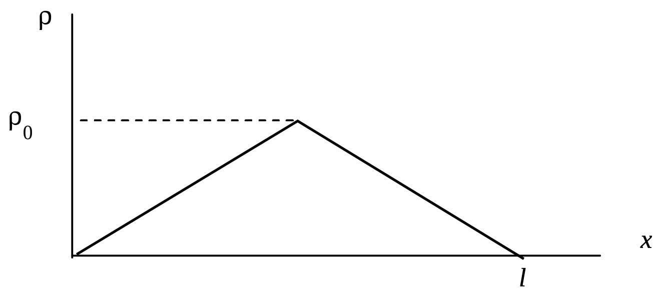



Рис.

Деформация профиля волны, обусловленная тем, что скорость точки с максимальным значением $\rho=\rho_0$ превышает скорость всех остальных участков волны, изображена на рисунке.

Для рассмотренного распределения решение перестает быть однозначной функцией координаты при $t>t_0$. Определить дальнейшую эволюцию системы с помощью дифференциального уравнения невозможно, поэтому дальнейшее описание процесса мы проведем с помощью интегральных соотношений. Квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0,$$

где

$$\Phi = \int V(\rho) d\rho.$$

Ему соответствует интегральное соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \Phi(x_1) - \Phi(x_2).$$

Для рассматриваемого случая

$$\Phi = \int V(\rho) d\rho = \frac{\rho^2}{2\rho_0}.$$

Выбирая контрольные поверхности в точках, где поток равен нулю, получим закон сохранения (массы) в выделенном объеме:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = const.$$

Предположим, что в начальный момент времени имеется разрывное решение (сформировавшееся из рассмотренного ранее непрерывного треугольного)

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \rho_0\, x/l & 0 < x < l \\ 0 & x > l \end{cases}$$

Если при дальнейшей эволюции этого решения имеется лишь единственный разрыв, то его координата в момент $t = t_1$ связана с амплитудой волны соотношением

$$\frac{\rho_1}{x_1} = \frac{\rho_0}{l + V_0 t},$$

которое следует из подобия треугольников. Здесь мы полагаем, что существование разрыва никак не влияет на распространение волны левее него.

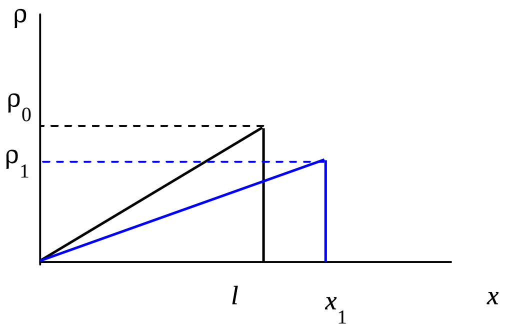



Рис.

Закон сохранения (массы) дает второе соотношение:

$$\rho_0 l = \rho_1 x_1.$$

Отсюда следует закон движения разрыва – «фронта ударной волны»:

$$x_1(t) = l\sqrt{1 + V_0 t / l}.$$

Движение разрыва происходит со скоростью

$$\dot{x}_1(t) = V_0/2\sqrt{1+V_0 t/l}\,.$$

Амплитуда волны с течением времени убывает:

$$\rho_1(t) = \rho_0\Big/\sqrt{1+V_0 t/l}\,.$$

Квазилинейные уравнения широко используются для описания волновых процессов, сопровождающихся деформацией начального распределения.
Известны и широко используются обобщения квазилинейных уравнений, описывающие распространение волновых пакетов (специальной формы) без деформаций. Приведем эти уравнения и их решения.

**1) Уравнение Кортевега – де Фриса (КдФ)**

Это уравнение получается добавкой «дисперсионного» члена:

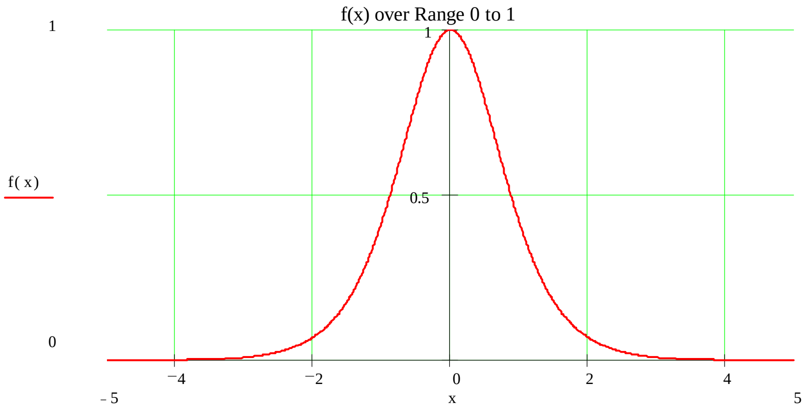
$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1+12u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0\,.$$

Решение уравнения КДФ, убывающее на бесконечности, имеет вид

$$u(x,t) = \frac{a^2}{4}\operatorname{ch}^{-2}\left(a\left(x-\left(1+a^2\right)t+b\right)/2\right),$$

где $a$, $b$ - произвольные постоянные.

Оно описывает уединенную волну – **солитон,** распространяющийся со скоростью $V(a) = 1+a^2$, зависящей от амплитуды волны.



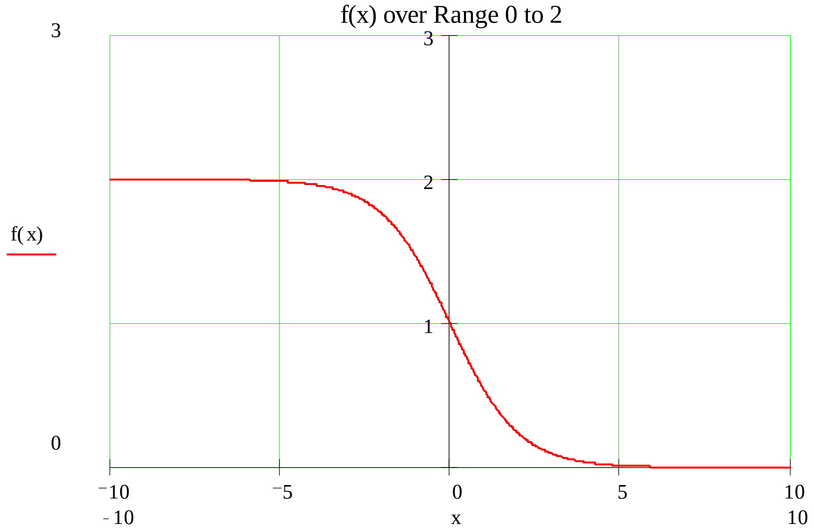

Рис

**2) Уравнение Бюргерса** (с диссипацией)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \delta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Для этого уравнения известно **решение Тейлора** («ударная волна»), имеющее вид:

$$u(x,t) = a\delta\left\{1-\operatorname{th}\left(ax-\delta a^2 t/2\right)\right\}$$




Рис