

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

1. Концепция сплошной среды

В предыдущих разделах курса в основном рассматривалось движение материальной точки либо абсолютно твердого тела. Движение деформируемых твердых или жидких тел практически не затрагивалось. Исключением является описание свойств однородного упругого стержня или пружины с помощью закона Гука.

Понятие сплошной среды

В настоящем разделе курса мы рассмотрим некоторые простые способы описания движения деформируемых тел, в которых преобладают неупругие деформации. Поскольку описание деформаций вообще представляет достаточно сложную задачу, мы ограничимся изучением свойств сплошной среды. Сплошной средой называется физическое тело, свойства которого в соседних точках мало отличаются. Это означает, что физические величины определяющие рассматриваемые свойства сплошной среды, близки в соседних точках. Традиционными примерами таких тел являются жидкости или газы.

Предполагается, что механические и термодинамические характеристики сплошной среды могут быть описаны физическими полями, такими как поле плотности, скорости, давления и т.д. Напомним, что полем физической величины называется одна или несколько функций заданных в каждой точке пространства в каждый момент времени.

На практике задание поля физической величины связано с определенной процедурой усреднения, которую мы поясним примерами.

Предположим, что рассматриваемое тело можно представить в виде совокупности большого числа частиц постоянного состава, каждая из которых занимает некоторый элементарный объем. Если элементарный объем, занимаемой частицей можно выбрать так чтобы его размерами можно было пренебречь при описании движения, то такую частицу можно рассматривать, как материальную точку. В большинстве случаев этот объем следует выбрать достаточно малым. Движение сплошной среды тогда может быть представлено, как движение очень большой совокупности таких частиц. Более подробно понятие «элементарный объем» рассматривается ниже.

Одним из возможных методов описания является определение движения каждой из частиц т.е. определение физических величин, с ними связанных. Такой подход называется описанием Лагранжа. Применение описания Лагранжа представляет определенные удобства, поскольку непосредственно связано с возможностью использования моделей материальной точки и твердого тела. Однако, на практике такой подход используется только для изучения движения в течение небольших интервалов времени. Если сплошная среда движется в ограниченном объеме в течение достаточно большого времени, то траектории частиц сильно перепутываются. Частицы, первоначально находившиеся в соседних точках пространства оказываются разделенными. Элементарные объемы, занимаемые соседними частицами, при таком движении сильно деформируются и могут иметь значительное протяжение при малом объеме. Это приводит к тому, что малость первоначального объема не гарантирует близости физических свойств вещества в нем спустя некоторое время, что в свою очередь исключает применения аппарата дифференциального исчисления к такой среде.

Полевые величины в переменных Эйлера

Более удобным является подход Эйлера. В этом подходе рассматриваются мысленно выделенные объемы переменного состава, положение которых задается координатами «точки наблюдения» – любой точки, принадлежащей выделенному объему. Предполагается, что можно выбрать объем настолько малым, что физические величины среды внутри такого объема не зависят от выбора «точки наблюдения». Таким образом, в каждой точке пространства в каждый момент времени можно определить величины, задающие состояние сплошной среды – физические поля. Рассмотрим в качестве примера введение поля плотности. Предположим, что деформируемое тело устроено так, что в окрестности любой точки заданной радиус-вектором \vec{r} , существует достаточно малый объем ΔV такой, что масса вещества в этом объеме Δm пропорциональна величине этого объема и не зависит от его формы и размеров:

$$\Delta m \sim \Delta V.$$

Коэффициент пропорциональности Γ в этом выражении называется плотностью тела в данной точке пространства в данный момент времени $\Gamma = \Gamma(\mathbf{r}, t)$. Таким образом

$$\Delta m = \Gamma \Delta V.$$

Объем, для которого выполняется пропорциональность, называется элементарным, а физическое тело – сплошной средой. На практике пропорциональность соблюдается не для любой формы и не для любого малого объема. На величину объема обычно накладывается ограничение $\Delta V_{\min} < \Delta V < \Delta V_{\max}$. Для изучения вещества в обычных условиях ограничение снизу обусловлено молекулярной структурой вещества. Минимальный объем должен содержать достаточно большое число молекул, чтобы можно было пренебречь флуктуациями. Максимальный размер элементарного объема выбирается из условий достижения приемлемой точности описания.

Аналогичным образом вводятся и поля других физических величин, например, скорости или давления. Считается, что движение сплошной среды может быть задано полем скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, если в окрестности «точки наблюдения» \mathbf{r} для каждого момента времени t существует элементарный объем ΔV такой, что скорости всех частиц среды в этом объеме можно считать одинаковыми с заданной точностью.

Модель сплошной среды имеет широкую область применения. Ее можно использовать например, для изучения движения обычных жидкостей или газов. Если элементарный объем выбрать достаточно большим, например сравнимым или превышающим размеры солнечной системы, то модель сплошной среды может быть использована и для описания движения звезд вблизи ядра Галактики.

2. Поле скоростей и деформации среды

Поле скоростей сплошной среды описывает произвольные ее движения, включая и деформации. Поскольку движение без деформаций может быть описано моделью твердого тела, рассмотрим подробнее условия, которым удовлетворяет поле скоростей, описывающих деформации сплошной среды. Описание движения частиц будем вести в переменных Эйлера.

Сделаем замечание о форме записи векторных величин. Далее мы будем использовать две формы представления вектора – задание его с помощью проекций в выбранной декартовой системе, например x_k, V_k , где индекс k пробегает значения от 1 до 3, либо как абстрактный геометрический объект, отмечая векторы стрелкой \vec{r}, \vec{V} и т. д. Для упрощения действий с векторами в случае задания их проекциями, примем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

Для краткости представление векторов в первом виде будем называть тензорным, а второе – векторным. Во многих случаях использование векторных обозначений вместо тензорных (там где это возможно) оказывается предпочтительным, поскольку вид уравнений, записанных в векторной форме, не связан с конкретным выбором координат. В частности, векторная форма может быть использована для записи уравнений в произвольных ортогональных координатах, например, цилиндрических или сферических.

Для определения деформаций рассмотрим скорость частиц в двух близких точках – x_k и $x_k + \delta x_k$. Полагая поле скоростей дифференцируемым, в линейном приближении по δx_k получим

$$V_i(x_k + \delta x_k, t) = V_i(x_k, t) + \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta x_k.$$

Очевидно, что в том случае, когда скорости всех точек среды одинаковы, т.е. $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} = 0$,

деформации среды отсутствуют. Однако и в случае $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \neq 0$ существуют движения, не приводящие к деформациям. Напомним, что движение тела называется деформацией, если изменяются расстояния между его точками. Это происходит только в том случае, когда проекции скоростей любой пары точек на прямую, их соединяющую, не равны. В рассматриваемом случае этой прямой является вектор δx_k , а проекция вектора скорости пропорциональна скалярному произведению $V_i(x_k, t)dx_i$. Применяя этот критерий к частицам сплошной среды, получим условие на поле скоростей, при которых деформации отсутствуют для любых $\delta x_i \neq 0$:

$$V_i(x_k + \delta x_k, t)\delta x_i = V_i(x_k, t)\delta x_i.$$

Полученное соотношение приводит к дифференциальному условию для поля скоростей, описывающего движение без деформаций:

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \delta x_i \delta x_k \equiv 0$$

для любых $\delta x_i \neq 0$.

Свертка тензора $T_{ik} = \frac{\partial V_i}{\partial x_k}$ и симметричного тензора $\Delta_{ik} = \delta x_i \delta x_k$ ($\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$), не равного нулю, обращается в нуль только в том случае, когда тензор T_{ik} является антисимметричным, т.е.

$$T_{ik} = -T_{ki}.$$

Представляя тензор T_{ik} в виде суммы антисимметричного тензора A_{ki} и симметричного тензора S_{ik}

$$T_{ik} = A_{ki} + S_{ik},$$

где

$$A_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right),$$

а

$$S_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)$$

получим следующий критерий для определения деформации сплошной среды.

Движение сплошной среды является деформацией, если симметричный тензор

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)$$

не равен тождественно нулю. Этот тензор называется **тензором скоростей деформаций** и определяет скорость изменения расстояния между соседними точками сплошной среды.

Если выбрать ориентацию осей системы координат так, чтобы в рассматриваемой точке тензор скоростей деформаций стал диагональным

$$S_{ik} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{pmatrix},$$

то за время dt расстояние между точками, находящимися на осях, изменится:

$$\delta x'_1 = \delta x_1 + S_{11} \delta x_1 dt, \quad \delta x'_2 = \delta x_2 + S_{22} \delta x_2 dt, \quad \delta x'_3 = \delta x_3 + S_{33} \delta x_3 dt.$$

Это приведет к изменению рассматриваемого элементарного объема $\delta V = \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$:

$$\delta V' = \delta x'_1 \delta x'_2 \delta x'_3 = \delta V [1 + (S_{11} + S_{22} + S_{33})dt]$$

Скорость изменения относительного объема определяется суммой диагональных компонент тензора скоростей деформаций:

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta V} \frac{\delta V' - \delta V}{dt} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \frac{\partial V_k}{\partial x_k}.$$

или в векторной форме

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Таким образом, скорость изменения элементарного объема пропорциональна дивергенции вектора скорости в рассматриваемой точке.

Запишем соотношения между скоростями частиц среды в соседних точках пространства, используя векторные обозначения. Для этого сопоставим антисимметричному тензору

$$A_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \text{ псевдовектор вихря} \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j}, \text{ записав свертку этого}$$

тензора с единичным антисимметричным тензором Леви-Чивита

$$e_{lmn} = \begin{cases} e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \\ e_{213} = e_{321} = e_{132} = -1 \\ \text{остальные равны нулю} \end{cases}$$

Такое сопоставление взаимно-однозначно:

$$A_{lm} = \varepsilon_{lmn} \omega_n.$$

Последнее соотношение легко доказывается, если учесть тождество $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mlk} = \delta_{im} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jm}$:

$$\varepsilon_{lmn} \varepsilon_{njk} A_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{jkn} A_{jk} = \frac{1}{2} (\delta_{lj} \delta_{mk} - \delta_{lk} \delta_{mj}) A_{jk} = \frac{1}{2} (A_{lm} - A_{ml}) = A_{lm}.$$

Введение псевдовектора вихря позволяет записать вектор скорости среды в точке $x_k + \delta x_k$

$$V_i(x_k + \delta x_k, t) = V_i(x_k, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} - \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \delta x_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \delta x_k$$

в виде:

$$V_i(x_k + \delta x_k, t) = V_i(x_k, t) + \varepsilon_{imk} \omega_m \delta x_k + \frac{\partial \Psi}{\partial \delta x_i},$$

$$\text{где } \Psi = \frac{1}{2} S_{ik} \delta x_i \delta x_k = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) \delta x_i \delta x_k.$$

В векторных обозначениях полученное равенство имеет вид:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \delta \mathbf{r}] + \operatorname{grad}_{\delta \mathbf{r}} \Psi,$$

$$\text{где } \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{V}}.$$

Это соотношение называется формулой Коши-Гельмгольца.

3. Интегральные характеристики поля. Потoki

Кроме дифференциальных характеристик поля часто используются и интегральные характеристики, применение которых делает описание более наглядным. Одной из наиболее удобных характеристик векторного поля является линия поля. Линией векторного поля $\dot{\mathbf{A}}$

называется непрерывная линия, касательная к которой в любой ее точке совпадает с вектором поля в этой точке. Пусть линия поля задана в параметрическом виде уравнением $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(s)$, где

s - параметр, например, длина дуги. Касательный вектор $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}(s)}{\partial s} ds$ пропорционален вектору поля, т.е.

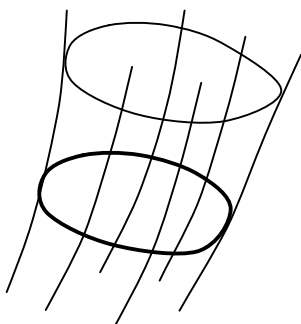
$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}(s)}{\partial s} ds = a\mathbf{A}.$$

Это условие можно записать и так:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Для поля скорости уравнение линии, называемой линией тока, имеет вид:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}.$$



Если линии тока проходят через замкнутый контур L , то образуемая ими трубка называется трубкой тока. Поскольку вектор скорости на границе трубки тока касателен к ней, то в случае стационарного течения все частицы жидкости будут оставаться внутри этой трубки. Трубка тока называется элементарной, если вектор поля \mathbf{A} в любой точке поверхности S , натянутой на контур L , одинаков.

Потоки физических величин и трубка тока.

Потоком вектора поля \mathbf{A} через элементарную поверхность $d\mathbf{S}$ называется величина $d\Phi = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S})$. Для поля скорости \mathbf{V} потоком вектора скорости является $d\Phi_V = (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S})$. Если рассматривать движение жидкости в течение элементарного интервала времени Δt , то частицы сплошной среды, находящиеся в момент времени на контуре L , за это время перемещаются на $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{V} \Delta t$. Тогда величина $d\Phi_V \cdot \Delta t = (\mathbf{V} \Delta t \cdot d\mathbf{S}) = (\Delta \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}) = \Delta \mathbf{V}$ - это объем жидкости, прошедшей через контрольную поверхность.

Для несжимаемой жидкости $\text{div } \mathbf{V} = 0$ и поток через любую замкнутую поверхность ограничивающую некоторый объем, равен нулю:

$$\oint_{\Sigma} (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}) = \int_V \text{div } \mathbf{V} dv = 0.$$

Подобно линиям тока можно ввести линии вихря $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{V}$. Уравнение линий вихря

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}.$$

Поскольку $\text{div } \mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{div rot } \mathbf{V} = 0$, поток вихря через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint (\vec{w} \cdot d\vec{S}) = 0.$$

Если в качестве замкнутой поверхности рассматривать объем трубки вектора вихря, ограниченный двумя сечениями Σ_1 и Σ_2 , то поток вектора не зависит от выбора контрольного сечения:

$$\int_{\Sigma_1} (\vec{w} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Sigma_2} (\vec{w} \cdot d\vec{S}).$$

Используя теорему Стокса, можно преобразовать поверхностный интеграл в криволинейному:

$$\int_{\Sigma} (\vec{w} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{2} \oint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S}) = \frac{1}{2} \oint_C (\vec{V} \cdot d\vec{l}) = \Gamma.$$

Постоянство потока вихря вдоль трубки вихря тогда можно рассматривать, как сохранение циркуляции вектора вихря Γ по любому контуру, охватывающему эту трубку. Поток физических величин.

Представление о потоке массы или скорости можно расширить и на другие физические величины скалярной, векторной или тензорной природы. Особенно наглядно представление о потоке для экстенсивных (пропорциональных числу частиц) физических величин. Отметим некоторые величины и их потоки

Скалярные: поток числа частиц, поток массы, поток электрического заряда, поток кинетической и внутренней энергии, поток энтропии.

Векторные: поток скорости, поток вихря, поток напряженности поля, поток импульса, поток кинетического момента.

Балансные соотношения.

4. Описание взаимодействия в сплошной среде

Для построения динамической теории необходимо ввести физические величины, описывающие действие на выделенный элементарный объем других тел. В механике материальной точки для этого использовался вектор силы. Рассмотрим силовое описание воздействия и в механике сплошной среды, введя необходимые модификации. Напомним, что в механике точки мы разделяли силы на два основных типа – силы дальнего действия, для которых можно указать зависимость от расстояния между телами, и силы контактные, возникающие при соприкосновении точки и твердого тела. Контактные силы обусловлены малыми деформациями, которые не регистрируются обычным способом, и поэтому контактные силы мы выделяли в особый класс сил, называемых силами реакции.

Объемные силы

Аналогичное разделение целесообразно провести и в механике сплошной среды. Рассмотрим вначале дальнего действия силы, к которым относятся электромагнитные и гравитационные силы. Пусть элементарный объем ΔV заполнен сплошной средой плотности

r , так что его масса $\Delta m = r\Delta V$. Сила тяжести, действующая на этот объем,

$\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{g} = r \vec{g} \Delta V$ оказывается пропорциональной величине объема независимо от его размеров и формы: $\Delta \vec{F} \sim \Delta V$. Векторный коэффициент пропорциональности называется (объемной) плотностью силы: $\Delta \vec{F} = \vec{f} \Delta V$. В рассматриваемом случае объемная плотность силы имеет вид: $\vec{f} = r \vec{g}$.

Плотность силы задается в каждой точке пространства в каждый момент времени и определяет физическое поле плотности силы: $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$.

По определению, для дальнего действия сил можно ввести поле плотности силы, если сила, действующая на элементарный объем ΔV пропорциональна величине этого объема и не зависит от его формы и размеров. К силам такого типа относятся и электромагнитные силы, действующие на заряженную сплошную среду, если распределение заряда пропорционально величине элементарного объема.

Поверхностные силы

Для контактных сил ситуация несколько иная. Существуют такие контактные силы, величина которых пропорциональна площади соприкосновения рассматриваемого элементарного объема с другими телами: $\Delta \mathbf{F} \sim \Delta \mathbf{S}$. Величину и ориентацию элементарной поверхности соприкосновения зададим вектором $\Delta \mathbf{\hat{S}}$. Направление векторов $\Delta \mathbf{\hat{F}}$ и $\Delta \mathbf{\hat{S}}$ не обязательно совпадает и может зависеть от ориентации площадки, поэтому коэффициенты пропорциональности образуют тензор второго ранга. Поэтому соотношение между элементарной силой и элементарной площадкой удобнее записать в тензорных обозначениях. Пусть ΔF_i - проекции элементарного вектора силы, а ΔS_k - проекции вектора элементарной площадки. Тогда условие пропорциональности имеет вид: $\Delta F_i = p_{ik} \Delta S_k$, где тензор второго ранга $p_{ik} = p_{ik}(x_s, t)$ определяет поле, характеризующее контактное воздействие на данную элементарную поверхность других частей сплошной среды. Положение элементарной площадки в выбранной системе отсчета определяется ее координатами x_s в данный момент времени t и ориентацией, задаваемой вектором $\Delta \mathbf{S}_k$. Этот тензор называется тензором локальных напряжений.

Диагональные компоненты тензора определяют нормальные (перпендикулярные) составляющие вектора силы, действующего на площадку, а недиагональные – касательные составляющие этой силы.

В общем случае тензор второго ранга задается девятью компонентами, однако во многих средах в силу закона сохранения кинетического момента этот тензор оказывается симметричным:

$$p_{ik} = p_{ki},$$

что снижает число независимых компонент тензора до 6. Соответствующим выбором ориентации осей координатной системы можно привести симметричный тензор к диагональному виду.

В простых моделях сплошной среды ее воздействие на элементарную площадку можно считать не зависящим от ориентации. Такая среда называется изотропной. Если касательные составляющие сил, действующих на площадку пренебрежимо малы, то тензор напряжений в этом случае оказывается диагональным, причем все его компоненты одинаковы. Такая ситуация реализуется в модели взаимодействия жидкости или газа, находящегося в относительном равновесии, описываемом законом Паскаля. Жидкость или газ подчиняющиеся этому закону, называются идеальными. Тензор напряжений идеальной сплошной среды имеет вид:

$$p_{ik} = -p(x_s, t) d_{ki}.$$

Знак «минус» в этом выражении выбран так, чтобы элементарная сила, действующая на поверхность, ограничивающую некоторый выделенный объем, была направлена внутрь этого объема при стандартном выборе внешней к поверхности нормали. При этом удобно считать коэффициент пропорциональности $p(x_s, t)$ положительной величиной.

В более сложных случаях применяются модели, в которых сила, действующая на элементарную поверхность, имеет касательные составляющие, обычно пропорциональные скорости.

5. Уравнения движения сплошной среды

В основу описания сплошной среды обычно кладутся определенные дифференциальные уравнения, связывающие ее характеристики, хотя в некоторых случаях, например, при описании разрывных течений, дифференциальные соотношения неприменимы. В этих случаях используют интегральные соотношения.

Основные дифференциальные уравнения, описывающие свойства сплошной среды, могут быть получены из интегральных балансных соотношений для физических величин, ее характеризующих. Применение балансных соотношений оказывается эффективным либо в тех

случаях, когда известны локальные законы сохранения рассматриваемых величин, такие как закон сохранения массы или электрического заряда, либо в ситуациях, когда удается установить закон изменения рассматриваемой величины, как для импульса или кинетического момента системы.

Таким образом, рассматриваемые соотношения тесно связаны с законами сохранения или теоремами об изменении определенных механических, электрических или термодинамических величин и являются обобщением их на случай системы переменного числа частиц возникающих при использовании переменных Эйлера.

Рассмотрим простейшие из них. Напомним, что при описании в переменных Эйлера выделенный объем сплошной среды выбран всюду неподвижным по отношению к заданной системе отсчета.

1. Уравнение непрерывности

Рассмотрим изменение массы в некотором выделенном объеме сплошной среды V предполагая, что ее частицы могут свободно проникать сквозь поверхность Σ ограничивающую этот объем. Пусть $r(x_k, t)$ - заданное поле плотности. Масса в выделенном объеме определяется интегралом

$$M = \int_V r(x_k, t) dV$$

Изменение массы, в силу локального закона ее сохранения, могут быть вызваны только потоками массы через поверхность Σ :

$$I_M = \oint_{\Sigma} r v_k ds_k$$

Балансные соотношения для массы приводят к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} M = -I_M,$$

которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V r(x_k, t) dV = - \oint_{\Sigma} r v_k ds_k.$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, правую часть этого выражения можно преобразовать к интегралу по объему, так что выражение примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V r(x_k, t) dV = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} r v_k dV.$$

Поскольку полученное соотношение справедливо для любого объема сплошной среды, т. е является тождеством относительно V , то подынтегральное выражение в левой и правой частях этого равенства совпадает. Это приводит к уравнению непрерывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} r + \frac{\partial}{\partial x_k} r v_k = 0.$$

Это соотношение можно записать в векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{r} \mathbf{\hat{v}}) = 0.$$

Векторная величина $\mathbf{j} = \mathbf{r} \mathbf{\hat{v}}$ называется плотностью потока массы.

Еще одна распространенная форма записи связана с введением *субстанциальной производной* $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Понятие о субстанциальной производной связано с представлением о дифференцировании вдоль траектории движения частицы и фактически представляет собой переход от описания Эйлера к описанию Лагранжа. Мы будем

рассматривать субстанциальную производную только как некоторый дифференциальный оператор, упрощающий форму записи уравнений.

Выполняя дифференцирование во втором слагаемом, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} + \mathbf{r} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0.$$

Вводя субстанциальную производную, получим:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{r} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}.$$

В векторной форме это соотношение имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Если рассматриваемая сплошная среда является несжимаемой, т.е. $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, то из уравнения непрерывности следует, что $\frac{d\rho}{dt} = 0$, т.е. вдоль любой линии тока плотность среды остается постоянной $\rho = \rho_0$.

2. Уравнения Эйлера

Несколько сложнее получить дифференциальные уравнения, определяющие изменение импульса сплошной среды. Воспользуемся для этого теоремой об изменении импульса системы, учитывая, что число частиц в ней может изменяться.

Вновь рассмотрим мысленно выделенный объем V , пронизываемый для частиц сплошной среды, и определим импульс этого объема. Поскольку импульс элементарного объема dV определяется уравнением:

$$dp_i = dm \cdot v_i = \rho v_i \cdot dV,$$

полный импульс выделенного объема определяется интегралом:

$$P_i = \int_V \rho v_i dV.$$

Изменение импульса в этом объеме вызвано двумя независимыми факторами. Частично изменение импульса в выделенном объеме обусловлено переносом его частицами пересекающими границу объема. Поток импульса через границу определяется выражением:

$$I_i^p = - \oint_{\Sigma} \rho v_i v_k ds_k.$$

Другая часть изменения импульса выделенного объема вызвана приложенными к нему внешними силами и определяется соответствующей теоремой динамики системы частиц. Это приводит к следующему уравнению, учитывающему действие как объемных, так и поверхностных сил:

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = I_i^p + \int_V f_i dV + \oint_{\Sigma} p_{ik} ds_k.$$

Подставляя сюда выражение для потока импульса через границу, получим выражение для скорости изменения импульса рассматриваемого объема:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \oint_{\Sigma} \rho v_i v_k ds_k + \int_V f_i dV + \oint_{\Sigma} p_{ik} ds_k.$$

Переходя, с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, от интегрирования по поверхности к интегрированию по объему, получим окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \int_V \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} dV + \int_V f_i dV + \int_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dV.$$

В силу произвольности объема интегрирования, можно перейти к дифференциальному

уравнению, определяющему изменение импульса сплошной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(rv_i v_k) = f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}.$$

Для идеальной жидкости $p_{ik} = -pd_{ik}$ это уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(rv_i v_k) = f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

и называется уравнением Эйлера.

Использование субстанциальной производной позволяет записать уравнение в векторной форме

$$\frac{d}{dt}(\varrho \mathbf{v}) + \varrho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p,$$

которую можно упростить, учитывая уравнение непрерывности

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p$$

Вместе с уравнением непрерывности это уравнение составляет основу описания идеальной сплошной среды.

6. Элементы термодинамики

Уравнение непрерывности и уравнение Эйлера позволяют определить поле скоростей и поле плотности для системы, в которой задано поле давлений и поле массовых сил. Однако в обычной постановке задач поле давлений не задано. Для формулировки задач о движении сплошной среды в этом случае необходимы дополнительные соотношения, связывающие давление, плотность и скорость. Такие соотношения могут быть получены в рамках термодинамики. Напомним основные свойства классических термодинамических систем (ТД систем).

Характеристики тела определяются совокупностью механических величин, таких как масса, плотность, объем, полная энергия, давление, а также специфических термодинамических величин, определяющих параметры теплового движения, таких как температура. Термодинамические характеристики могут быть использованы только для систем, находящихся в термодинамическом равновесии.

Состояние однородной системы при заданном числе частиц $N = \text{const}$ определяется термодинамическими переменными – давлением, объемом и температурой - p, V, T . Связь между этими переменными определяется свойствами рассматриваемого вещества и задается **термическим уравнением**:

$$p = p(V, T, N).$$

Для идеального газа термическим уравнением является уравнение Клапейрона-Менделеева:

$$p = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{V}.$$

Первое начало термодинамики

Одной из основных характеристик системы частиц является ее энергия. Полная энергия молекул, включающая энергию хаотического (теплового) движения молекул и энергию их взаимодействия в рассматриваемой системе отсчета, усредненная за время измерения, называется внутренней энергией. Внутренняя энергия термодинамической системы является функцией состояния. Напомним, что для идеального одноатомного газа внутренняя энергия определяется соотношением:

$$E = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Воздействие на ТД систему внешних тел условно подразделяется на механическое, вызывающее деформации (изменение объема), и тепловое, которое может изменять состояние системы без деформаций.

При механическом воздействии изменение внутренней энергии системы определяется совершенной ею механической работой. Величина теплового воздействия определяется количеством энергии, передаваемой системе в процессе теплопередачи, и измеряется количеством теплоты. Суммарное изменение внутренней энергии во всех процессах

$$\Delta E = Q - A.$$

Количество теплоты и механическая работа, совершенная системой при переходе из начального состояния в конечное, зависят как от этих состояний, так и от характера перехода. То есть, они не являются функциями начального и конечного состояний рассматриваемой системы.

Теплопередача обычно сопровождается изменением температуры системы. Если изменение температуры при теплопередаче пропорционально количеству теплоты, полученной системой:

$$\delta Q \sim dT,$$

что обычно бывает в случае малых изменений в системе

$$\delta Q \ll E,$$

то коэффициент пропорциональности, зависящий как от вещества, так и от характера рассматриваемого процесса, называется теплоемкостью:

$$\delta Q = C_n dT.$$

Здесь индекс указывает характер процесса: изобарный, изохорный и т.д.

В общем случае теплоемкость процесса зависит от начального состояния системы. Если механическая работа системой не совершается, то количество теплоты, полученное системой равно изменению ее внутренней энергии, которая является функцией ее термодинамических параметров, например, температуры и объема $E = E(V, T)$

$$dQ = dE(V, T).$$

Малое изменение внутренней энергии системы в этом случае приводит к малому изменению ее температуры. Коэффициент пропорциональности $C_V = C_V(V, T)$ в этом случае называется теплоемкостью при постоянном объеме, т.к. $dA = p dV = 0$, и зависит от температуры и объема. Задание $E = E(V, T)$ называется **калорическим уравнением**:

Задание термического и калорического уравнений полностью определяет модель рассматриваемого вещества.

Идеальный газ

Одной из простейших содержательных моделей является модель идеального газа. Для массы m идеального одноатомного газа теплоемкость изохорного процесса

$$C_V = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} R.$$

Теплоемкость изобарного процесса такого газа связана с изохорной теплоемкостью соотношением Майера:

$$C_p = C_V + \frac{m}{\mu} R.$$

Вводя отношение теплоемкостей $\gamma = C_p / C_V$, соотношение Майера можно записать в виде

$$\frac{m}{\mu} R = C_V (\gamma - 1).$$

Удобной моделью для быстро протекающих механических обратимых процессов, когда теплообменом можно пренебречь, является адиабатическое приближение. Теплоемкости системы в таком процессе равна нулю. Используя первое начало термодинамики в дифференциальной форме, получим уравнение, связывающее давление и объем в этом процессе – уравнение Пуассона.

При малых изменениях объема системы элементарная работа пропорциональна изменению объема, а коэффициент пропорциональности определяется термическим уравнением

состояния $p = p(V, T)$, так что первое начало термодинамики может быть представлено в дифференциальной форме, причем все величины, входящие в правую часть уравнения являются функциями состояния:

$$\delta Q = dE + pdV.$$

Для идеального газа $dE = C_v dT$. С учетом термического уравнения $p = C_v(\gamma - 1)T/V$ первое начало термодинамики для адиабатических процессов приводит к уравнению

$$C_v dT + C_v(\gamma - 1) \frac{T}{V} dV = 0.$$

Если переход из начального состояния в конечное можно рассматривать как последовательность промежуточных квазиравновесных состояний, то дифференциальное соотношение допускает интегрирование:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

Учитывая термическое уравнение, отсюда легко получить зависимость давления от объема системы – адиабату Пуассона, описывающую обратимые процессы без теплопередачи:

$$p(V) = p_0(V/V_0)^\gamma.$$

Здесь p_0, V_0 - параметры начального состояния системы.

Уравнения термодинамики в переменных сплошной среды

При использовании термодинамических уравнений для описания газодинамических процессов часто бывает удобно ввести в уравнения плотность среды, исключив объем с помощью уравнения $m = \rho V$. Вводя удельные величины с помощью соотношений:

$$E = me \quad Q = mq \quad C_v = mc_v \quad R = \mu r, \quad c_v = R/\mu,$$

термическое и калорическое уравнения для идеального газа можно записать в виде:

$$p = r\rho T \quad e = c_v T.$$

Первое начало термодинамики для удельных величин в этом случае представляется уравнением:

$$\delta q = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Уравнение обратимой адиабаты Пуассона в этих переменных имеет вид:

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma,$$

где p_0, ρ_0 - давление и плотность газа в начальном состоянии.

Энтропия ТД системы и второе начало термодинамики

Дифференциальная форма первого начала термодинамики позволяет ввести для описания процессов теплопередачи функцию термодинамического состояния системы - энтропию в соответствии с уравнением

$$\delta Q = TdS.$$

Для идеального газа это утверждение формально следует из дифференциальной формы первого начала при учете термического и калорического уравнений:

$$\delta Q = C_v dT + pdV,$$

где $C_v = \text{const}$, $p = C_v(\gamma - 1) \frac{T}{V}$.

Поскольку $\left. \frac{\partial C_v}{\partial V} \right|_T \neq \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$, то δQ не является полным дифференциалом и, следовательно, не может быть функцией состояния. Однако, поделив левую и правую часть уравнения на температуру, мы получим равенство:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{C_v}{T} \right)_T = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{C_v}{V} \right)_V = 0,$$

которое является необходимым и достаточным условием того, что выражение является полным дифференциалом:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = dS(T, V).$$

Таким образом, для идеального газа существует функция состояния - энтропия описывающая теплообмен при квазиравновесных процессах. Интегрирование приводит к явному выражению для нее:

$$S(T, V) = C_v \ln \left(\frac{TV^{g-1}}{T_0 V_0^{g-1}} \right) = mc_v \ln \frac{p/p_0}{(r/r_0)^g}.$$

Здесь константа интегрирования выбрана равной нулю.

Отсюда выражение для удельной энтропии идеального газа:

$$s = c_v \ln \frac{p/p_0}{(r/r_0)^g}.$$

Утверждение о том, что температура для любой системы, а не только для идеального газа является интегрирующим множителем, называется вторым началом термодинамики, которое в формулировке Каратеодори гласит:

"Вблизи любого термически равновесного состояния системы существует другое состояние, как угодно мало отличающееся от первого, которое не может быть достигнуто путем адиабатического перехода". Можно показать, что оно эквивалентно более привычной формулировке Клаузиуса о необратимости самопроизвольного перехода теплоты от более нагретого тела к менее нагретому без каких-либо других изменений в неравновесной системе.

Как следует из определения, в адиабатических (и квазиравновесных) процессах энтропия сохраняется.

Введение энтропии позволяет с помощью второго начала определить внутреннюю энергию как функцию двух переменных – энтропии и давления:

$$d\epsilon = Tds + \frac{p}{\varrho^2} d\varrho$$

и установить связь между различными термодинамическими переменными с помощью соотношений:

$$T = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_\varrho, \quad p = \varrho^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \varrho} \right)_s.$$

В изэнтропийных процессах при $s = s_0 = \text{const}$ $\epsilon = \epsilon(\varrho, s_0) = \epsilon(\varrho)$, что и определяет зависимость $p = p(\varrho)$, необходимую в уравнениях движения сплошной среды.

Термодинамические потенциалы. Энтальпия.

Очень удобно в механике сплошной среды использование другого термодинамического потенциала – энтальпии, определяемой уравнением:

$$w = \epsilon + p/\varrho.$$

Дифференциал энтальпии, как следует из второго начала, имеет вид:

$$dw = Tds + dp/\varrho,$$

так что $w = w(s, \varrho)$.

В изэнтропийных процессах $dw = dp/\varrho$, что позволяет записывать правую часть уравнения Эйлера в компактной форме, удобной для дальнейшего анализа.

Неравновесные процессы и рост энтропии.

В неравновесной изолированной системе двух тел, очень слабо взаимодействующих между

собой, можно определить температуру каждого из тел. Пусть температура первого тела выше: . Рассмотрим процесс теплообмена, полагая, что других изменений в системе нет. Тогда направление теплопередачи определено вторым началом термодинамики (в форме Клаузиуса). При этом энтропия первого тела уменьшается на величину $dS_1 = \frac{\delta Q}{T_1}$, а второго

увеличивается на $dS_2 = \frac{\delta Q}{T_2}$. Поскольку $dS_2 > dS_1$, энтропия такой системы растет в процессе установления термодинамического равновесия. Обобщая это утверждение на любые неравновесные процессы, можно утверждать, что во всех случаях установления равновесия в термодинамической системе энтропия увеличивается. В частности, изменения в адиабатической системе $\delta Q = 0$ могут идти лишь в направлении роста энтропии $\Delta S > 0$, и состояние равновесия определяется условием $S = \max$.

Замечание.

Мы рассмотрим далее не только квазиравновесные процессы. Движение газа может сопровождаться возникновением ударной волны, в которой энтропия системы возрастает.

Однако вначале целесообразно рассмотреть простейшие процессы – изэнтропийное движение идеальной жидкости.

Потоки термодинамических величин. Балансные соотношения.

6. Баротропное движение идеальной жидкости

В общем случае плотность среды является функцией температуры и давления: $\rho = \rho(p, T)$. Такие процессы называются бароклиными. Если дополнительные условия, например, адиабатичность движения, позволяют установить зависимость плотности только как функции давления $\rho = \rho(p)$, то процессы являются баротропными.

Система уравнений идеальной среды

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{q}(\nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0 \\ \mathbf{q} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{q}\mathbf{f} - \nabla p \end{aligned}$$

с заданной зависимостью $\mathbf{q} = \mathbf{q}(p)$ образует систему из пяти уравнений для пяти величин, что позволяет полностью решить задачу. Однако угадать термодинамические процессы в каждой точке сплошной среды удастся лишь в исключительных случаях. К таким случаям относится обратимый адиабатический процесс, упомянутый выше. В частности, для модели идеального газа зависимость определяется адиабатой Пуассона $p(\mathbf{q}) = p_0(\mathbf{q}/\mathbf{q}_0)^\gamma$, где $\gamma = C_p/C_v$.

Если в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках сплошной среды, то условие адиабатичности движения жидкости можно просто записать в виде $s = \text{const}$. Такое движение называют *изэнтропическим*.

Существенно, что в правую часть уравнений движения идеальной жидкости вместо шести неизвестных полевых функций $p_{ij}(\mathbf{r}, t)$ будет входить всего одна функция $p(\mathbf{r}, t)$, так что уравнения движения идеальной жидкости, называемые уравнениями Эйлера, принимают вид (в тензорных обозначениях)

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (28)$$

или (в векторной форме)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p. \quad (29)$$

Движения идеальной жидкости, при которых ее плотность можно рассматривать только как функцию давления, называют *баротропными* $\rho = F(p)$. Такое движение можно описать системой из пяти уравнений - (29), (24) и уравнения, выражающего баротропность движения или уравнения (27), так как баротропность реализуется и при общем *изэнтропическом* движении идеальной жидкости.

Изменение удельной внутренней энергии определяется термодинамическим уравнением теплопроводности (1-й закон термодинамики)

$$\frac{de}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{dV}{dt} = T \frac{ds}{dt} - \rho p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (30)$$

Если к системе уравнений (29), (27), (24), (30) добавить *термическое уравнение* состояния $p = p(\rho, T)$ и *калорическое уравнение*, $e = e(\rho, T)$, то мы также получим систему уравнений описывающую *изэнтропические* движения идеальной жидкости. При изэнтропическом движении идеальной жидкости

$$dw = Vdp, \quad (31)$$

где w - удельная энтальпия жидкости, V - удельный объем, и поэтому

$$\nabla w = \frac{\nabla p}{\rho}, \quad (32)$$

Уравнение Эйлера в форме Громеки-Лэмба

Запишем векторное уравнение Эйлера для баротропного движения в виде так называемого уравнения в форме Громеки-Лэмба. Используем соотношение:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (33)$$

и следующие легко проверяемые равенства

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - [\mathbf{v} \cdot [\nabla \cdot \mathbf{v}]] = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 - [\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}]. \quad (34)$$

Рассмотрим случай потенциальной внешней силы, так что $\mathbf{f} = -\nabla U$. Подставляя (33) и (34) в (29), получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2[\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}] = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + w + U \right) \equiv \nabla P. \quad (36)$$

Здесь мы также использовали соотношение $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$,

7. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

Интеграл Бернулли

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости. *Стационарным* или *установившимся* течением называют такое движение, при котором в каждой точке пространства, заполненного жидкостью, поле скоростей постоянно во времени, так что

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

Умножим уравнение Эйлера в форме Громеки-Лэмба на единичный вектор касательной к линии тока в каждой ее точке. Тогда, учитывая что $(\mathbf{1} \cdot [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}]) = 0$, получим

$$(\mathbf{l} \cdot \nabla)P = (\mathbf{l} \cdot \text{grad } P) \equiv \frac{\partial P}{\partial l} = 0.$$

Отсюда следует, что в случае стационарного изэнтропического движения идеальной жидкости, находящейся в поле консервативных массовых сил, скалярная величина

$$P = \frac{v^2}{2} + w + U \quad \text{постоянна вдоль каждой линии тока:}$$

$$\frac{v^2}{2} + w + U = \text{const}.$$

Значение const , вообще говоря, различно для разных линий тока. Полученное соотношение называется *интегралом Бернулли*.

Если умножить уравнение Эйлера скалярно на вектор вихря, то вновь получим интеграл Бернулли, который сохраняется теперь вдоль линии вихря. Таким образом, интеграл Бернулли сохраняется на поверхности, натянутой на линию тока и вихря, проходящую через выбранную линию тока.

Интеграл Коши

Рассмотрим теперь безвихревое изэнтропическое движение идеальной жидкости находящейся в поле консервативных массовых сил. *Безвихревым* или *потенциальным* называют движения жидкости, при котором во всем пространстве завихренность равна нулю т.е.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

Поле скоростей при потенциальном течении может быть представлено в виде

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \equiv \text{grad } \Phi.$$

Скалярная функция координат и времени $\Phi(\mathbf{r}, t)$ называется потенциалом скорости.

Подставив эти выражения для скорости и вихря в уравнение Громеки-Лэмба, получим

$$\mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{\Phi}{t} + \frac{v^2}{2} + w + U \right) = 0.$$

Полученное уравнение можно проинтегрировать:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w + U = f(t),$$

где $f(t)$ - произвольная функция времени. Этот интеграл называется *интегралом Коши*.

При стационарном движении $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, $f(t) = \text{const}$, и интеграл Коши переходит в интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + w + U = \text{const}.$$

8. Поток энергии идеальной жидкости

Ограничимся рассмотрением адиабатных изэнтропийных процессов

Теорема об изменении энергии

Умножая уравнение Эйлера скалярно на вектор скорости, можно получить уравнение, описывающие изменение плотности энергии среды:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -(\mathbf{r} \cdot \nabla p) - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}).$$

Левая часть этого уравнения преобразуется к виду:

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) - \frac{v^2}{2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\rho v^2}{2} - \frac{v^2}{2} \frac{d\rho}{dt}.$$

Для преобразования последнего слагаемого воспользуемся уравнением непрерывности:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho.$$

В итоге левая часть уравнения принимает вид:

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho v^2}{2} (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) \quad (a)$$

Для вычисления мощности поверхностных сил давления в среде $(\mathbf{v} \cdot \nabla) p = \nabla \cdot (p \mathbf{v}) - p(\nabla \cdot \mathbf{v})$ воспользуемся первым началом термодинамики

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt},$$

которое, с учетом уравнения непрерывности, можно записать в виде:

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{p(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\rho}.$$

Из этого выражения с учетом уравнения непрерывности получаем

$$p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \rho \frac{de}{dt} - \frac{d}{dt}(\rho e) = \frac{d}{dt}(\rho e) + \rho e(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}(\rho e).$$

Отсюда для адиабатных процессов $\frac{dq}{dt} = 0$ мощность сил определяется выражением

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}) = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) p = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) - \nabla \cdot ((\rho e + p) \mathbf{v}). \quad (б)$$

Равенства (а), (б) и (в) приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) + \text{div} \left(\frac{\rho v^2}{2} \mathbf{v} \right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) - \text{div}((\rho e + p) \mathbf{v}) + (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}),$$

которое можно рассматривать, как уравнение для изменения плотности энергии вещества и поля:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -\text{div} \left(\left(\rho w + \frac{\rho v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right)}$$

Здесь $w = e + p/\rho$ - плотность энтальпии.

Это выражение можно проинтегрировать по некоторому фиксированному объему. Используя тензорную форму записи, получим

$$\frac{1}{t} \int_V \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \int_V \frac{1}{x_i} r v_i \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dV.$$

Преобразуя интеграл, стоящий справа, с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, и интеграл по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем, получим выражение которое допускает простую интерпретацию:

$$\frac{1}{t} \int_V \left(\frac{v^2}{2} + e \right) dV = - \oint_S r v_i \left(\frac{v^2}{2} + w \right) dS_i.$$

Подынтегральное выражение слева представляет собой плотность энергии и определяется суммой внутренней энергии и кинетической энергии макроскопического движения среды. Это выражение аналогично соответствующему выражению в механике системы точек, которое определяется по теореме Кенига.

Подынтегральное выражение справа представляет собой плотность потока энергии среды через поверхность, а также учитывает мощность поверхностных сил, действующих на систему.

9. Вихревое движение жидкости

С помощью уравнения Эйлера в форме Громеки-Лэмба можно получить уравнение движение вихря в баротропной среде, применяя операцию rot к левой и правой частям:

$$\frac{\partial \mathbf{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{\omega} \times \mathbf{v}) = 0,$$

где $\mathbf{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}$ - вихрь скорости.

Для несжимаемой среды дополнительно выполняется соотношение

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Если $\mathbf{\omega} \neq 0$, то движение является вихревым, а не потенциальным.

Совокупность жидких частиц, составляющих вихрь, как бы отделена от остальной части жидкости поверхностью раздела. Векторное поле $\mathbf{\omega}$ можно изобразить с помощью вихревых линий, уравнение которых имеет вид:

$$\frac{dx_1}{\omega_1(t)} = \frac{dx_2}{\omega_2(t)} = \frac{dx_3}{\omega_3(t)}.$$

Совокупность вихревых линий, натянутых на замкнутый контур C , ограничивающий выделенную элементарную поверхность S , образует вихревой шнур (трубку вихря), что позволяет определить поток вихря или его интенсивность:

$$\Phi = \int_S \mathbf{\omega} \cdot d\mathbf{S}.$$

Преобразуя это выражение по теореме Стокса, получим:

$$\Phi = \int_S \mathbf{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Gamma.$$

Здесь $\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ - циркуляция вектора скорости.

Замечание. Теорема Стокса применима лишь в односвязной области, в которой контур путем непрерывной деформации может быть стянут в точку. Если движение жидкости происходит в неодносвязной области, то течение может характеризоваться отличной от нуля циркуляцией и в случае $\text{rot} \mathbf{v} = 0$.

Примером такого движения является обтекание цилиндра двумерным потоком с циркуляцией. Это пример рассматривается далее.

Теорема Томсона о сохранении циркуляции

Циркуляция скорости по контуру, проводимому через одни и те же частицы идеальной жидкости, не изменяется с течением времени $\Gamma = \text{const}$, если процессы являются баротропными, а силы потенциальными.

Доказательство

$$\frac{d}{dt} \Gamma = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{v} \cdot d \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части с помощью уравнения Эйлера

$$\oint_C \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_C \text{grad}(U + P) \cdot d\mathbf{l} = - \oint_C d(U + P) = 0.$$

Второе слагаемое также обращается в нуль, поскольку контур образован жидкими частицами

и $d \frac{d\mathbf{l}}{dt} = d\mathbf{v}$, так что

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \int_C d \frac{v^2}{2} = 0.$$

Теоремы Гельмгольца

Первая теорема.

Поток вихря по всей длине вихревой трубки (интенсивность вихря) одинаков в данный момент времени.

Доказательство

Рассмотрим жидкость, заключенную в трубке вихря между сечениями S_1 и S_2 в некоторый момент времени и вычислим поток вихря через замкнутую поверхность, ограничивающую этот объем, воспользовавшись теоремой Гаусса:

$$\oint_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div} \boldsymbol{\omega} \cdot dV = 0.$$

$$\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \Gamma$$

Поскольку $\int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \Gamma$, полученный результат означает, что циркуляция вектора скорости в любом сечении трубки, вычисленная в некоторый момент времени, остается постоянной:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \text{const}.$$

Отсюда следует, что вихревая трубка может быть либо замкнутой, образуя вихревые кольца, либо опираться на границы жидкости.

Вторая теорема

Если внешние силы потенциальны, то жидкая масса, составляющая вихревую трубку в какой-то момент времени, сохраняется в форме вихревой трубки и во все последующие моменты времени.

Доказательство

Любой контур, образованный частицами жидкости на поверхности вихревой трубки, остается на этой поверхности.

Действительно, циркуляция вектора скорости в некоторый момент времени по контуру на поверхности трубки равна нулю

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

ибо $\boldsymbol{\omega} \perp d\mathbf{S}$ на поверхности трубки вихря. Но так как $\Gamma = \text{const}$ для контура, связанного с жидкостью, то значение циркуляции остается равным нулю для любого контура. Это значит, что вектор вихря остается перпендикулярным элементарной площадке, натянутой на контур, т.е. площадка принадлежит поверхности вихревой трубки. Следовательно, вихрь движется вместе с жидкостью.

Третья теорема

При действии на жидкость лишь потенциальных сил поток вихревой трубки во все время движения остается постоянным.

См. теорему Томсона.

Вторая и третья теоремы Гельмгольца составляют **принцип сохранения вихря** или **устойчивость вихревой трубки**:

Если в начальный момент вихри в жидкости отсутствуют (течение потенциально), то они и не могут возникнуть в идеальной жидкости без границ. Таким образом, для возникновения вихрей нужна вязкая жидкость и/или наличие границ.